DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS
AREA DE MATEMATICAS

INVESTIGACION DE OPERACIONES

AUTOR: *OSCAR A. ROMERO CARDENAS*
INGENIERO INDUSTRIAL
ESPECIALISTA EN INFORMATICA Y MULTIMEDIA
ESPECIALISTA EN ESTADISTICA APLICADA

TEMA: *LINEAS DE ESPERA (TEORIA DE COLAS)*

OBJETIVOS:

GENERAL:
Conocer y aplicar los las principales características de las Líneas de Espera de un servidor con uno o múltiples canales de servicio.

ESPECIFICOS
1. *Conocer los principales componentes de un Sistema de Líneas de Espera*
2. *Calcular indicadores de rendimiento para un Sistema de una Línea de Espera y un Servidor*
3. *Calcular indicadores de rendimiento para un Sistema de una Línea de Espera y Servidores Múltiples*

TIEMPO: *DOS (2) HORAS*

CONDUCTA DE ENTRADA:

Comprobar matemáticamente las siguientes operaciones:

1. $$\frac{1}{\left(\frac{1.8^0}{0!}+\frac{1.8^1}{1!}\right)+\left(\frac{1.8^2}{2!}\right)*\left(\frac{2}{2-1.8}\right)}=0.0526$$

2. $\left(\frac{1.8^{2+1}}{(2-1)!}\right) * \frac{1}{(2-1.8)^2} * 0.0526 = 7.67$

3. $0.2131 + \frac{1}{20} = 0.2631$

4. *Si 1 hora = 60 minutos y el cajero de un banco puede atender un cliente en 3 minutos, en una hora puede atender 20 clientes.*

TEMATICA

DEFINICIONES

Las colas, filas o líneas de espera, forman parte de nuestra vida cotidiana como usuarios de cualquier sistema al cual tengan acceso varias personas, léase bancos, supermercados, universidad, etc., pudiendo hacerse extensivo a materiales, maquinarias y en general a cualquier situación donde se requiera esperar en una fila para recibir un producto o un servicio.

De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta que la labor de un gerente es identificar las debilidades y fortalezas del sistema que administra, para ello debe establecer indicadores de rendimiento que le permitan determinar si el manejo que está dando es el apropiado.

Cada sistema es particular. Sin embargo, la Investigación de Operaciones ha tratado de estandarizar algunos de ellos, basándose en lo siguiente:

Población

Entendiéndose por tal todos los posibles usuarios de un sistema. La misma puede ser finita (taller de mecánica especializado, restaurante gourmet) o infinita (banco, universidad, supermercado).

Tiempo entre llegadas

El cual debe ser determinístico ó probabilístico (también conocido como estocástico), donde:

***Deterministico**: clientes sucesivos llegan en un mismo intervalo de tiempo fijo y conocido (ej.: línea de ensamblaje).*

***Probabilístico**: el tiempo entre llegadas es incierto y variable (distribución de probabilidad), en nuestro caso utilizaremos la Distribución Exponencial.*

Sistema

Compuesto por la línea de espera (cola) y el servidor, pudiendo tratarse de una o varias líneas y de uno o varios servidores.

Disciplina de colas

Se refiere a cómo se presta el servicio, pudiendo ser:

Primero en entrar primero en salir (PEPS): Bancos - supermercados

Ultimo en entrar primero en salir (UEPS): Amontonamiento de producción

Selección de prioridad: Urgencias hospitalarias

Proceso de servicio

Que fundamentalmente en nuestro caso sería:

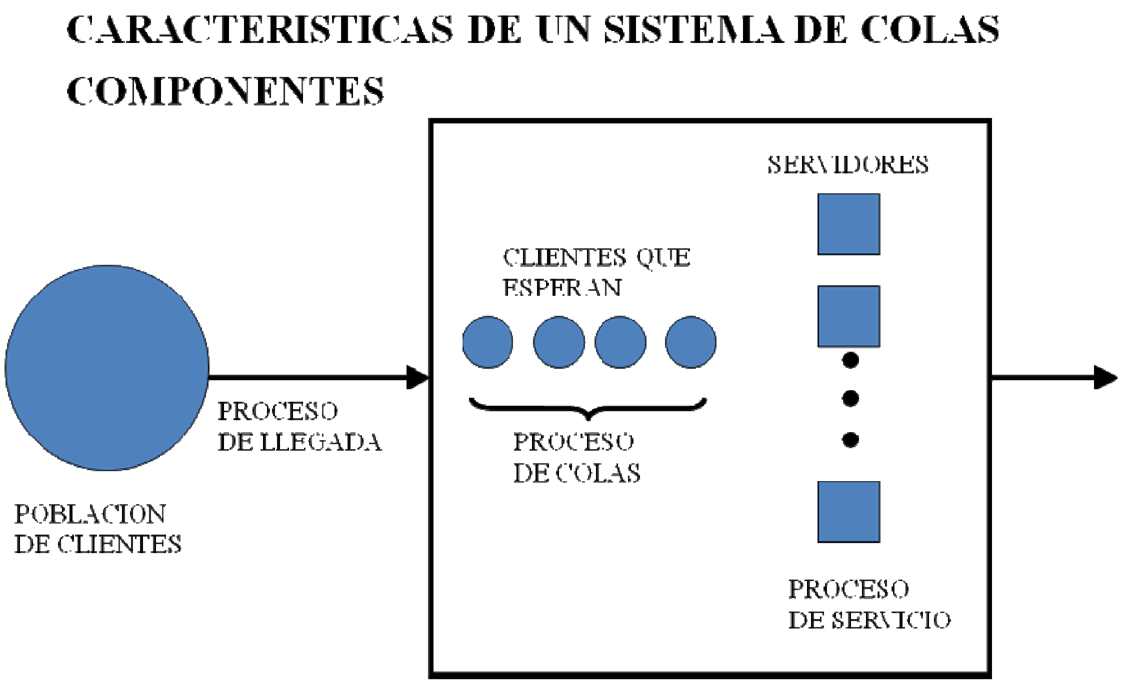
***Sistema de colas de canal sencillo**: proceso productivo (control de calidad) - lavado de automóviles - báscula de pesado de automóviles*

***Sistema de colas de canal múltiple:** bancos - supermercados*

Debe tenerse en cuenta que:

- *La línea de espera ó cola no incluye a quien está recibiendo el servicio*
- *Un servicio muy rápido generaría unos costos excesivos que irían en contra de la rentabilidad del negocio*
- *Los modelos matemáticos que aquí se estudiarán buscan encontrar el equilibrio ente los diferentes indicadores*

Gráficamente se puede representar de la siguiente forma:



Teniendo en cuenta que pueden existir muchas variaciones de este modelo, la presente guía se ocupará de las siguientes opciones:

- Una línea de espera y un servidor
- Una línea de espera y múltiples servidores

SISTEMA DE UNA LINEA DE ESPERA Y UN SERVIDOR

Para este caso y considerando que el propósito principal es determinar algunos indicadores de rendimiento, haremos los siguientes supuestos:

- Tamaño de la población: INFINITO
- Tiempo entre llegadas: PROBABILÍSTICO
- Proceso de colas: DE UNA SOLA LÍNEA
- Disciplina de colas: PEPS
- Proceso de servicio: CANAL SENCILLO (SERVIDOR)

Con relación a los indicadores de rendimiento, tendremos en cuenta los siguientes:

λ = *Número promedio de llegadas por unidad de tiempo*
μ = *número promedio de clientes atendidos por unidad de tiempo en un canal o servidor*
$1/\lambda$ = *Tiempo de espera entre llegadas*
$1/\mu$ = *Tiempo esperado de servicio*
$\rho = \lambda / \mu$

1. *Número promedio de clientes en la cola (número promedio de clientes que esperan el servicio)* — $L_q = \rho^2 / (1-\rho)$
2. *Tiempo promedio de espera en la cola* — $W_q = L_q / \lambda$
3. *Tiempo promedio en el sistema* — $W = Wq + 1/\mu$
4. *Número promedio de clientes en el sistema (número de clientes que esperan en la cola más el número de clientes que actualmente reciben el servicio)* — $L = \lambda * W$
5. *Probabilidad de que no haya clientes en el sistema* — $P_0 = 1 - \rho$
6. *Probabilidad que un cliente que llega tenga que esperar* — $P_W = 1 - P_0 = \rho$
7. *Probabilidad de haya n clientes en el sistema* — $Pn = \rho^n * P_0$
8. *Utilización* — $U = \rho$

Ejemplo

Supongamos un lavadero automático de vehículos, que cuenta con una máquina para estos propósitos. A solicitar el servicio llegan en promedio 15 vehículos / hora y la máquina puede lavar un vehículo en 3 minutos. Calcule todos los indicadores de rendimiento.

Empezaremos por calcular ρ*. Para ello empezaremos por identificar* λ *y* μ*. Con base en la información que tenemos:*

λ = 15 vehículos / hora
$1/\mu$ = 3 minutos / vehículo, de donde:
μ = 20 vehículos / hora

La hora será la unidad de tiempo para nuestros indicadores.

Por lo tanto: $\rho = \lambda / \mu = 0.75$

Entre más cercano de 1, mas cargado estará el sistema, con resultado de colas más largas y tiempos de espera mayores.

NUMERO PROMEDIO EN LA FILA (L_q)
$L_q = \rho^2 / (1- \rho) = 2.25$ vehículos
TIEMPO PROMEDIO DE ESPERA EN LA COLA (W_q)
$W_q = L_q / \lambda = 0.15$ horas (9 minutos)
TIEMPO PROMEDIO DE ESPERA EN EL SITEMA (W)
$W = Wq + 1/ \mu = 0.20$ horas (12 minutos)
NUMERO PROMEDIO EN EL SISTEMA (L)
$L = \lambda * W = 3$ vehículos
PROBABILIDAD DE QUE NO HAYA CLIENTES EN EL SISTEMA (P_0):
$P_0 = 1 - \rho = 0.25 = 25\%$ del tiempo
PROBABILIDAD QUE UN CLIENTE QUE LLEGA TENGA QUE ESPERAR (P_W)
$P_W = 1 - P_0 = \rho$ (75% del tiempo)
PROBABILIDAD DE QUE HAYA n CLIENTES EN EL SISTEMA (P_n)
$Pn = \rho^n * P_0$

n	***Pn***
0	*0.2500*
1	*0.1875*
2	*0.1406*
3	*0.1055*
etc.	*Etc.*

¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de 3 vehículos en el sistema?
$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0.6836$ (68%)

UTILIZACION (U)

U = ρ = 0.75 (75%)

SISTEMA DE UNA LINEA DE ESPERA Y MULTIPLES SERVIDORES

Nuestros indicadores de rendimiento variarán considerando los siguientes supuestos:

- *Tamaño de la población: INFINITO*
- *Tiempo entre llegadas: PROBABILÍSTICO*
- *Proceso de colas: DE UNA SOLA LÍNEA*
- *Disciplina de colas: PEPS*
- *Proceso de servicio: CANAL MULTIPLE (VARIOS SERVIDORES)*

Los mismos serán ahora:

λ = Número promedio de llegadas por unidad de tiempo
μ = número promedio de clientes atendidos por unidad de tiempo en un canal o servidor
1/λ = Tiempo de espera entre llegadas
1/μ = Tiempo esperado de servicio
$\rho = \lambda / \mu$
c= Número de servidores

1. *Probabilidad de que no haya clientes en el sistema*

$$Po = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^{\,n}}{n!}\right) + \left(\frac{\rho^c}{c!}\right) * \left(\frac{c}{c-\rho}\right)}$$

2. *Número promedio de clientes en la cola*

$$Lq = \left(\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!}\right) * \frac{1}{(c-\rho)^2} * Po$$

3. Tiempo promedio de espera en la cola

$$Wq = \frac{L_q}{\lambda}$$

   Tiempo promedio en el sistema

$$W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

4. Número promedio de clientes en el sistema $L = \lambda * W$

5. Probabilidad que un cliente que llega tenga que esperar $Pw = \frac{1}{c!} * \rho^c * \frac{c}{c-\rho} * Po$

6. Probabilidad de haya n clientes en el sistema (n<=c) $Pn = \frac{\rho^n}{n!} * Po$

   Probabilidad de haya n clientes en el sistema (n>c) $Pn = \frac{\rho^n}{(c!)c^{n-c}} * Po$

7. Utilización $U = 1 - \left[Po + \left(\frac{c-1}{c}\right)P_1 + \left(\frac{c-2}{c}\right)P_2 + \cdots + \left(\frac{1}{c}\right)P_{c-1}\right]$

Sin dejarse amilanar por las fórmulas, vamos a desarrollar el siguiente ejercicio.

Ejemplo

Supongamos el mismo lavadero automático de vehículos, pero que cuenta ahora con dos máquinas. A solicitar el servicio llegan en promedio 36 vehículos / hora y cada máquina puede lavar un vehículo en 3 minutos. Calcule todos los indicadores de rendimiento.

Empezaremos por calcular ρ. Para ello empezaremos por identificar λ y μ. Con base en la información que tenemos:

λ = 36 vehículos / hora
$1/\mu$ = 3 minutos / vehículo, de donde μ = 20 vehículos / hora

La hora será la unidad de tiempo para nuestros indicadores.

Por lo tanto: $\rho = \lambda / \mu = 1.80$

PROBABILIDAD DE QUE NO HAYA CLIENTES EN EL SISTEMA (P_0):

$$Po = \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{c-1} \rho^n\right) + \left(\frac{\rho^c}{c!}\right) * \left(\frac{c}{c-\rho}\right)}$$

$$Po = \frac{1}{\left(\frac{1.8^0}{0!} + \frac{1.8^1}{1!}\right) + \left(\frac{1.8^2}{2!}\right) * \left(\frac{2}{2-1.8}\right)} = 0.0526$$

NUMERO PROMEDIO EN LA FILA (L_q)

$$Lq = \left(\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!}\right) * \frac{1}{(c-\rho)^2} * Po$$

$$Lq = \left(\frac{1.8^{2+1}}{(2-1)!}\right) * \frac{1}{(2-1.8)^2} * 0.0526 = 7.67 \cong 8 \; vehículos$$

TIEMPO PROMEDIO DE ESPERA EN LA COLA (W_q)

$$Wq = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$Wq = \frac{7.67}{36} = 0.2131 \; (13 \; minutos)$$

TIEMPO PROMEDIO DE ESPERA EN EL SITEMA (W)

$$W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

$$W = 0.2131 + \frac{1}{20} = 0.2631 \; (16 \; minutos)$$

NUMERO PROMEDIO EN EL SISTEMA (L)

$$L = \lambda * W$$

$$L = 36 * 0.2631 = 9.47 \; \cong 10 \; vehículos$$

PROBABILIDAD QUE UN CLIENTE QUE LLEGA TENGA QUE ESPERAR (P_W)

$$Pw = \frac{1}{c!} * \rho^c * \frac{c}{c-\rho} * Po$$

$$Pw = \frac{1}{2!} * 1.8^2 * \frac{2}{2-1.8} * 0.0526 = 0.8521$$

PROBABILIDAD DE QUE HAYA *n* CLIENTES EN EL SISTEMA (P_n)

n<=c $$Pn = \frac{\rho^n}{n!} * Po$$

n	***Pn***
0	*0.0526*
1	*0.0947*
2	*0.0852*

n>c $$Pn = \frac{\rho^n}{(c!)c^{n-c}} * Po$$

3	*0.0767*
etc.	*Etc.*

¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de 3 vehículos en el sistema?
$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0.3092$ *(31%)*

UTILIZACION (U)

$$U = 1 - \left[Po + \left(\frac{c-1}{c}\right)P_1 + \left(\frac{c-2}{c}\right)P_2 + \cdots + \left(\frac{1}{c}\right)P_{c-1}\right]$$

$$U = 1 - \left[0.0526 + \left(\frac{2-1}{2}\right) * 0.0947\right] = 0.9000 = 90\%$$

EJERCICIOS

Calcule todos los indicadores de rendimiento para los siguientes casos:
1. $\lambda = 60$, $\mu = 66$, $c = 1$
2. $\lambda = 126$, $\mu = 70$, $c = 2$

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, David; SWEENEY, Dennis y WILLIAMS Thomas
Métodos cuantitativos para los negocios
Thomson, 2005

BONINI y HAUSMAN
Análisis Cuantitativo para los negocios
McGraw Hill, 2001.

EPPEN, G; GOULD, F y SCHMIDT, C.
Investigación de operaciones en la Ciencia Administrativa
Pearson, 2003.

KAMLES, H.
Investigación de Operaciones, el arte de la toma de decisiones
Prentice Hall, 2002

TAHA, Hamdy A.
Investigación de Operaciones
Alfaomega, 2004