4600

LOS LIBERTADORES INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ALGEBRA Y PROGRAMACIÓN LINEAL

GUIA: No. 3

TEMA: METODO SIMPLEX

AUTOR: FRANCISCO A. ORJUELA C.

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
GUÍA de Simplex
2005 - II

AUTOR:

Francisco A Orjuela C
Ingeniero Civil
Especialista en Evaluación de Proyectos
Especialista en Estadística Aplicada

TEMA: Método simplex

REVISADA POR: YENCY CASTRO RAMÍREZ, Licenciada En matemáticas. 2005-2

OBJETIVO GENERAL

Entender la aplicación del Algoritmo SIMPLEX en problemas del mundo real aplicados en Programación lineal cuando la función objetivo es maximizar con restricciones (menor o igual que).

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Construir la primera tabla del simplex.
- Hallar la primera solución factible de los problemas de programación lineal.
- Entender las iteraciones que se deben establecer para mejorar la función objetivo de los problemas y poder hallar el óptimo.
- Entender el significado de cada uno de los resultados de las tablas del simplex.
- Hallar la respuesta óptima a los ejercicios propuestos.
- Comprender los procedimientos generales del método simplex.

METODOLOGIA:

Se sugiere que este taller sea desarrollado en forma individual y sea apoyado por la bibliografía suministrada por el profesor de la materia.

CONCEPTOS PREVIOS:

Quizás la mejor forma de comprender lo que es el método simplex es recordar cual es la base del método gráfico, para así extrapolar estos conocimientos al método simplex.

TEMATICA:

El método consiste en partir de un vértice del conjunto de soluciones, o solución inicial y determinar si es óptima. Si no lo es, se pasa a partir de él a otro vértice adyacente (es decir, que difiera del anterior en el hecho de que una coordenada no nula del primero se anule en el segundo y viceversa), por un criterio semejante al del gradiente, en el que mejore el valor de la función objetivo o función económica, repitiéndose esta operación hasta que no sea posible mejorar la función objetivo, en cuyo caso ya se ha alcanzado el óptimo.

El número de iteraciones es finito y, según los casos, se encuentra entre n y 2n.

Programación lineal con variables enteras y binarias

En muchos casos la naturaleza de las variables que constituyen un programa lineal y las unidades en que vienen medidas exigen que estas variables tomen valores enteros, ejemplo: Número de vehículos, personas, productos, máquinas, etc.

En tal caso una aproximación para resolver el problema consiste en tratarlo sin tener en cuenta el carácter entero de las variables. Si la solución obtenida por la aplicación del método SIMPLEX resultara entera habríamos terminado con el problema.

Si no es así, una alternativa es redondear la solución, comprobando que el punto así obtenido es realmente una solución, es decir, satisface al conjunto de restricciones, o bien tomar de cada variable su parte entera, realizando la misma comprobación.

Cuando los valores de la variable son de magnitud considerable, estas alternativas garantizan una excelente aproximación al punto óptimo. Cuando los valores de las variables son pequeños el redondeo puede estar lejos de la solución óptima, *Así, que tenga cuidado.*

Hay varios métodos para abordar la solución de un programa lineal con variables enteras. El mas conocido es el de "Formas enteras de Gomory o métodos de los hiperplanos de corte" que, básicamente, consiste en introducir restricciones adicionales que sólo pueden satisfacer las soluciones enteras y que reducen paulatinamente el conjunto inicial de soluciones. Su solución conduce a cálculos muy laboriosos, que ahora se resuelven en el computador.

Otra consideración que se debe tener en cuenta es que se pueden usar variables binarias, esto es, que sólo puede tomar valores de 0 y 1, en un modelo de programación lineal. Esto se usa generalmente en los problemas de asignación.

III. SOLUCIONES DE MAXIMIZACION SIMPLEX

La mejor manera de aprender el método simplex es resolviendo problemas de programación lineal Para esto realicemos el siguiente ejercicio.

Una fábrica productora de embalajes plásticos, elabora dos tipos de containers de 3.750 c.c. y 4.000 c.c. Los datos de producción se presentan en la tabla adjunta. La persona encargada del termo-formado no puede trabajar más de 40 horas a la semana y los recursos económicos de la fábrica no permiten inversiones mayores de US$1.000 de materiales por semana ¿cuántos containers de cada tipo debería fabricar la industria, para obtener la utilidad máxima?

TIPO DE CONTAINER	TRABAJO POR CONTAINER	COSTO POR CONTAINER	UTILIDAD POR CONTAINER
3750 (A)	6 HORAS	$200	$240
4000 (B)	5 HORAS	$100	$160

<u>PASO 1</u>: Establezca el modelo:

Cómo es posible que haya más de dos variables, es usual representarlas como X_1 X_2 X_3, etc.

Variables independientes

X_1: Cantidad de container tipo A

X_2: Cantidad de container tipo B

Restricciones

C_1: $6X_1 + 5X_2 \leq 40$ Restricción de tiempo
C_2: $200X_1 + 100X_2 \leq 1000$ Restricción de dinero
C_3: $X_1 \geq 0$
C_4: $X_2 \geq 0$

ADL 27|35

Función objetivo:

$Z= 240X_1 + 160X_2$ (Z es la utilidad)

PASO 2: Convierta las desigualdades de restricciones en ecuaciones

$6X_1+5X_2=40$

Observe que si el número total de horas es menor que 40, implica que algunas horas no se aprovecharon, esto significa que C_1 se podría escribir como:

$C_1=6X_1+5X_2+S_1=40$

S_1 corresponde a la cantidad de horas no utilizadas, $S_1 \geq 0$

S_1 se denomina variable de holgura, de holgura debido a que establece el período libre entre las horas empleadas (pueden ser menos de 40) y las horas disponibles (exactamente 40). El introducir la variable de holgura convierte las desigualdades de restricción en ecuaciones, lo que implica que se puedan utilizar matrices y el método de Gauss Jordán para resolver el problema.

$C_2{:}200X_1 + 100X_2 \leq 1000$
$C_2{:}200X_1 + 100X_2+S_2$

Nuevamente S_2 es una variable de holgura que establece el dinero no utilizado, $S_2 \geq 0$. S_2 determina la cantidad no empleada de dinero (menor a US$1.000) y el dinero disponible (igual a US$1.000)

Las restricciones $C_3{:}X_1 \geq 0$ y $C_4{:}\ X_2 \geq 0$ son condiciones de no negatividad.

PASO 3: Reescriba la función objetivo con todas las variables en el lado izquierdo

$Z = 240X_1 + 160X_2$
$-240X_1 - 160X_2+ Z =0$

Incluyendo las variables de holgura

$-240X_1-160X_2+0S_1+0S_2+Z=0$

$C_1{:}6X_1+5X_2+S_1=40$
$C_2{:}200X_1+100X_2+S_2=1.000$

Recuerde que S_1= horas no utilizadas
S_2= dinero no utilizado

AVL 78 35

PASO 4: Plantee una matriz a partir de las restricciones y de la función objetivo reescritas.

$C_1 = 6X_1 + 5X_2 + S_1 + 0S_2 + 0Z = 40$
$C_2 = 200X_1 + 100X_2 + 0S_1 + S_2 + 0Z = 1000$
Función objetivo $-240X_1 - 160X_2 + 0S_1 + 0S_2 + Z = 0$

$$(1)\quad \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 200 & 100 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ -240 & -160 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow C_1 \\ \longleftarrow C_2 \\ \longleftarrow \text{Función objetivo} \end{array}$$

El método símplex requiere el examen de una serie de matrices. Recuerde que en el método gráfico se requería que examináramos una serie de puntos. En forma análoga el método símplex (cada matriz) nos proporciona un punto esquina de la región de soluciones factibles, sin necesidad de graficar la región.

Una última matriz símplex nos proporcionará el punto esquina óptimo (la solución al problema).

PASO 5: Determine la solución posible correspondiente a la matriz.

La solución factible se determina aplicando un método semejante al de Gauss-Jordan, utilizando como siempre un pivote (1) para obtener una matriz en la forma escalonada reducida por renglón.

El valor de la variable que encabeza cada una de las columnas se obtiene leyendo hacia abajo la columna, volteando en 1 y deteniéndose al final del renglón.

La matriz símplex inicial (1) no está en forma escalonada reducida por renglón . Las columnas S_1 , S_2 y Z si están en forma escalonada reducida, luego utilizando el esquema anterior.

$$F = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & \to 40 \\ 200 & 100 & 0 & 1 & 0 & \to 1000 \\ -240 & -160 & 0 & 0 & 1 & \to 0 \end{bmatrix}$$

ASL 29|35

Observe que $S_1=40$
$S_2=1000$
$Z=0$

Y consideremos, inicialmente $X_1=0$ $X_2=0$

Luego una solución factible corresponde a la matriz

$(X_1\ X_2\ S_1\ S_2) = (0,0,40,1000)$ con $Z=0$

Lo anterior es una solución factible por que si X_1 e $X_2=0$ se satisfacen las cuatro restricciones.

Esta solución factible implica: que no se fabricaría el container tipo A y B, dispondríamos de 40 horas no trabajadas y US$1.000 no gastados, luego no habría utilidad.

Si este ejercicio se resolviera por método gráfico, (es pertinente que usted realice el ejercicio) el (0,0) corresponde a un punto de esquina. El método símplex localiza los demás puntos de esquina hasta que encontremos el óptimo.

El método de Gauss-Jordan y el método símplex

Cuando se soluciona un sistema por el método de Gauss-Jordan no proporciona ninguna solución hasta que se obtiene la matriz final de Gauss-Jordan.

El método símplex, por el contrario proporciona una serie de soluciones posibles, una por cada matriz.

Cada solución posible sería un punto esquina de la región de posibles soluciones. Si se estuviese manejando el método gráfico.

Ahora apliquemos el método símplex para solucionar el problema.

Variables independientes

$X_1=$ Cantidad de container Tipo A
$X_2=$ Cantidad de container Tipo B

Variables de holgura

$S_1=$ Horas no empleadas
$S_2=$ Dinero no utilizado

Restricciones:

C_1:$6X_1+5X_2+S_1=40$ Restricción de tiempo
C_2:$200X_1+100X_2+S_2+1000$Restricción de dinero

Función objetivo

$-240X_1 - 160X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1Z = 0$

La primera matriz símplex es la siguiente

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 200 & 100 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ \hline -240 & -160 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \longleftarrow C_1 \\ \longleftarrow C_2 \\ \leftarrow \text{Función objetivo} \end{matrix} \end{array}$$

Una posible solución era $(X_1,X_2,S_1,S_2) = (0,0,40,1000)$ $Z=0$ pero no es la solución máxima.

El procedimiento que usaremos es igual al método de Gauss-Jordan excepto por la ubicación del punto pivote.

<u>PIVOTES POR EL MÉTODO SÍMPLEX</u>

<u>PASO 1</u>: Ubique el último renglón en la matriz anterior,(es la función objetivo). Escoja la entrada más negativa en ese renglón. La columna que contiene esa entrada será la columna pivote.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 200 & 100 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ \hline -240 & -160 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\uparrow$

Columna pivote

<u>PASO 2</u>: Divida la última entrada en cada renglón de restricción por la correspondiente entrada de la columna pivote. El renglón que de el menor cociente no negativo es el renglón pivote.

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 200 & 100 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ \hline -240 & -160 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 40/6 \quad N \cong 6.67 \\ \leftarrow 1000/200 \quad N \cong 5 \\ \leftarrow \text{No es renglón de restricción} \end{array}$$

Columna pivote

PASO 3: Elija como pivote la entrada del renglón y la columna pivote

$$\text{PIVOTE} \rightarrow \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 200 & 100 & 0 & 1 & 0 & 1000 \\ \hline -240 & -160 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{RENGLÓN PIVOTE}$$

Columna Pivote

El valor de 200 es el pivote. Haremos las operaciones de renglón, en forma similar que lo
haríamos por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.005 & 0 & 5 \\ \hline -240 & -160 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} \ F_2$$

APL 32|35

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 0 & 2 & 1 & -0.03 & 0 & 10 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.005 & 0 & 5 \\ \hline 0 & -40 & 0 & 1.2 & 1 & 1200 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -6 \; F_2 + F_1 \\ 240 \; F_2 + F_3 \end{array}$$

Cada matriz símplex, nos proporciona un punto esquina de la región de soluciones posibles; la matriz final símplex nos proporcionará el punto esquina óptimo.

La matriz anterior nos proporciona un punto de esquina, por que las columnas X_1,S_1 y Z sólo contienen unos y ceros.

Observe que $X_1=5$ $S_1=10$ $Z=1.200$ mientras que X_2,S_2 son cero (por qué?)

Por favor interprete esta solución:

La pregunta que podríamos formular es si éste punto esquina es el óptimo. Desafortunadamente la respuesta a la pregunta anterior se responde con otra pregunta ¿Es posible emplear pivotes nuevamente? Sí, si el último renglón contiene entradas negativas, en caso contrario no se requiere pivote y la solución posible que corresponde a la matriz es la máxima.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 0 & 2 & 1 & -0.03 & 0 & 10 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.005 & 0 & 5 \\ \hline 0 & -40 & 0 & 0 & 1 & 1200 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 10/2 = 5 \\ 5/0.5 = 10 \end{array}$$

Columna Pivote

El menor cociente no negativo es 5, renglón 1

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 1 & -0.03 & 0 & 10 \\ 1 & 05 & 0 & 0.005 & 0 & 5 \\ \hline 0 & -40 & 0 & 1.2 & 1 & 1200 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2} F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 0 & 1 & 0.5 & -0.015 & 0 & 5 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.005 & 0 & 5 \\ \hline 0 & -40 & 0 & 1.2 & 1 & 1200 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -0.5\ F_1 + F_2 \\ 40\ F_1 + F_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} X_1 & X_2 & S_1 & S_2 & Z & \\ 0 & 1 & 0.5 & -0.015 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -0.25 & 0.0125 & 0 & 2.5 \\ \hline 0 & 0 & 20 & 0.6 & 1 & 1400 \end{array}\right]$$

Ahora preguntémonos ¿Es posible emplear más pivotes? No, el último renglón contiene entradas no negativas. Esta es nuestra última matriz y la solución correspondiente a esta matriz es el punto esquina óptimo.

$(X_1,X_2,S_1,S_2) = (2.5\ ,\ 5\ ,\ 0.0)$ con $Z=1.400$

Por favor, interprete la solución.

CRITERIOS DE EVALUACION:

EL profesor titular de la materia le suministrará una serie de ejercicios sobre el tema y donde utilizará los conceptos adquiridos. Realizados estos ejercicios, además de los planteados por su profesor, la evaluación será tipo quiz con una estructura similar al ejercicio desarrollado en este taller, además de los planteados por el profesor.

EJERCICIOS

Resolver por el método simplex

1)

Minimizar: $Z = 10x_1+15x_2$

$$\text{Sujeta a: } \begin{array}{l} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1200 \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \le 1800 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

ΔPL 34 35

2) Minimizar: $Z = 2x_1+300x_2$

$$\text{Sujeta a: } \begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\leq 200 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 210 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3) Una empresa fabrica dos tipos de silla: ergonómica y normal. Para su construcción una silla pasa por 4 departamentos: ensamble, tapizado, color y terminado. Cada departamento tiene disponible 1.000 horas, 450 horas, 2.000 horas, y 150 horas respectivamente. Los requerimientos de producción y utilidades por silla se muestran en la siguiente tabla:

Tipo de silla	ensamble	Tapizado	color	terminado	Utilidad/silla
normal	2	1	4	¼	15
ergonómica	3	1	6	½	20

1. Plantea el modelo de programación lineal, definiendo las variables
2. resuelva el problema por el método simplex, para determinar cuántas sillas normales y ergonómicas se deben producir para obtener mayor utilidad.
3. Interprete todas las variables de holgura del problema.

APL 35'7?