FUNDACION UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
Semestre 02-2005

ASIGNATURA: INVESTIGACION OPERATIVA

ELABORADA POR: ARTURO YESID CORDOBA BERRIO
Ingeniero Industrial, Especialista en Transporte

REVISOR: Carlos Alfonso Gómez García.
Ingeniero de Petróleos
Especialización en Orientación Educativa
Especialización en Docencia Universitaria
Maestría en Investigación Social

TEMA: PROGRAMACION LINEAL
FORMULACION DE PROBLEMAS

LOGROS

- Conocer diferentes tipos de problemas de Programación lineal
- Obtener criterios que permitan plantear un problema determinado

OBJETIVOS

- AFIANZAR LOS CONOCIMIENTOS DE LOS MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL, COMO CAPITULO IMPORTANTE DENTRO DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES.
- CONTRIBUIR CON EL ANALISIS QUE SE DEBE HACER PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS MATEMATICOS UTILIZANDO LOS MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL,
- APORTAR AL ESTUDIANTE HERRAMIENTAS QUE LE AYUDEN A INTERPRETAR Y ANALIZAR LA IMPORTANCIA DE LOS RESULTADOS E IMPLICACIONES ADMINISTRATIVAS QUE PROVEE LA SOLUCION DE UN PROBLEMA.

CONDUCTA DE ENTRADA

Al momento de trabajar esta guía el estudiante debe contar ya con los conocimientos básicos de la estructura de un modelo de programación lineal, sus suposiciones restrictivas, su solución gráfica y algebraica.

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

La programación lineal puede usarse para resolver casi cualquier tipo de problema de asignación de recursos escasos, que pretendan encontrar su mejor combinación..

La formulación y definición del problema requiere de:

- Una descripción precisa de la meta (s) u objetivo (s) que se deseen conseguir y que son objeto de estudio.
- Identificar las variables de decisión, controlables y no controlables del sistema de decisión.
- Reconocimiento de las limitaciones o restricciones en las variables del sistema.
- La determinación de los límites del sistema y de las opciones abiertas es asunto de juicio.

Es importante que se tenga en cuenta que antes de entrar a detallar la forma como se resuelven los problemas de programación lineal, lo relevante que es aprender a definir las variables y las ecuaciones.
Los problemas de empresa generalmente se centran ***en dos aspectos: maximizar utilidades o minimizar costos***; los cuales se expresan en una función lineal *f*, la cual quedará sujeta a una serie de restricciones relacionadas con los recursos que son generalmente escasos o limitados.
Se entiende por **FORMULACION**, el término que indica trasladar un problema del mundo real al formato de ecuaciones matemáticas. Aprender a formular problemas, es algo complejo, que implica un conocimiento claro de la situación que se estudia, de sus alcances y limitaciones.
No existen formulas mágicas que permitan abordar y formular los problemas; cada situación es muy particular y exige del analista cuantitativo poder interpretar la realidad de la manera más ajustada posible y trasladar esa interpretación de un problema de negocios al formato de un modelo de ecuaciones matemáticas.
Formular cualquier modelo cuantitativo significa seleccionar los elementos importantes del problema y definir como se relacionan. Para los problemas del mundo real, esta es una tarea compleja que involucra juicio, y ensayo y error. De hecho, es más una arte que un procedimiento sistemático. Existen muchos problemas que por sus características similares, mantienen un mismo formato o un formato muy parecido, lo que facilita su formulación y posterior resolución. El conocimiento y la experiencia en la formulación y solución de todo tipo problemas, resultan muy útiles al momento de enfrentar un problema real. Es posible valerse de algunos lineamientos generales que ayudan al momento de enfrentar la formulación de modelos de programación lineal, algunos son:

- Se debe definir el objetivo que se pretende lograr al solucionar el problema de forma verbal, en los negocios, o ambiente empresarial, este objetivo casi siempre apunta directa o indirectamente a dos situaciones: Reducir costos o aumentar la contribución a las utilidades.

- Se debe elaborar una lista de las soluciones o alternativas de solución del problema, con las correspondientes decisiones a tomar. Este listado de las decisiones a tomar debe ser lo más específico que sea posible.

- Se debe elaborar de una manera verbal una lista de los factores limitantes o de restricción que afectan estas decisiones. Se debe buscar que sea lo más preciso y completo posible, a fin de representar lo más fielmente la situación real. En lo posible expresarlas en términos muy precisos que no generen posteriormente ambigüedades o malas interpretaciones.

Las restricciones más frecuentes que se pueden encontrar son :

- **Restricciones de capacidad:** Son límites a la cantidad de equipo, tiempo disponible de los equipos o procesos, espacio o disponibilidad de personal. Algunos ejemplos serían:

Para maquinar se cuenta con tres maquinas, durante 9 horas al día.
Las instalaciones solo permiten almacenar 5000 cajas de los productos elaborados, (A, B, C).

La capacidad de acabado en la planta es de 1000 horas-hombre semanales.

Se cuenta para atender el turno con 10 digitadores.

- **Restricciones de mercado**: Son límites (inferior, superior o ambos) acerca de la cantidad de producto que puede venderse o utilizarse.

Ejemplos:

- No se pueden producir mas de 2000 artículos del producto A por semana.
- Las metas de ventas esperan vender por lo menos, 5000 artículos del producto B cada mes.
- Para conseguir el punto de equilibrio, las ventas de los productos considerados no pueden ser menores de 60.000 unidades.

❖ **Restricciones de calidad o de requerimientos de la mezcla**. Son límites que se establecen para la mezcla de componentes que usualmente definen la calidad de los productos resultantes.

Para la producción de salchichas se deben cumplir con dos requisitos escenciales: El porcentaje de proteína, por peso, debe ser al menos el 15% , y el porcentaje de grasa, por peso, no puede exceder de 30% (el peso restante es relleno).

❖ **Restricciones de tecnología de producción o de equilibrio de material**. Son impedimentos que definen el resultado de algún proceso como función de las entradas.

Ej.: Las laminas de madera no pueden cortarse para exceder de una medida determinada o el proceso de cocido no puede durar más de un numero de horas.

❖ Restricciones de definición: Son las que definen una variable dada, con frecuencia se originan en definiciones contables. Ej: El inventario final al cabo de seis períodos debe ser cero, o en o en otras palabras no debe quedar inventario al final del semestre.

➢ Definir de manera específica las variables de decisión. Con frecuencia este es el paso más difícil. Lo que se necesita es una lista de variables; es decir, las X y sus definiciones, incluyendo las especificaciones de sus unidades de medida. Un método es definir las variables específicas ajustadas a la lista de decisiones que se elaboró previamente. Ej. En la mezcla de productos un conjunto de variables de decisión es:

X_1 Unidades del producto 1
X_2 Unidades del producto 2, etc.
Otro método es a través de un diagrama de flujo que relacione como interactúan las diferentes las diferentes partes del problema.

➢ Definir cuidadosa y específicamente las restricciones mediante las variables de decisión. Con la lista de restricciones previamente elaborada y las variables de decisión anteriormente detalladas.

➢ Por último definir la función objetivo en detalle. Tener en cuenta que para cada variable de decisión debe definirse un coeficiente de costo o de utilidad. Es importante incluir solo costos variables o utilidades (incrementales o las que aportan cada producto o variable definida), nunca se deben incluir los costos fijos. Por ejemplo aquellos costos que no se afecten con los volúmenes de producción deben tratar de excluirse en los planteamientos.

➢ Por último debe recordarse que tanto la función objetivo como las restricciones se deben plantear usando solamente ecuaciones (o inecuaciones) lineales, Recuérdese que se trata de un modelo de programación lineal y que además las variables no pueden tomar valores negativos, por lo que siempre será necesario incluir esta restricción.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE SIGNOS EN LAS RESTRICCIONES

En los problemas o en la vida real, encontramos algunas expresiones que al momento de plasmarlas en un modelo mateático, las podemos asociar con alguno de estos signos.

DESCRIPCION	SIGNO		DESCRIPCION	SIGNO
NO MAS DE	$\leq$		AL MENOS	$\geq$
COMO MAXIMO	$\leq$		COMO MINIMO	$\geq$
EL ESPACIO DISPONIBLE EN M2 ES DE	$\leq$		SE DEBEN ENTREVISTAR POR LO MENOS	$\geq$
EL INVENTARIO DE MATERIA PRIMA DISPONIBLE ES DE	$\leq$		SE DEBEN VENDER PARA CUMPLIR LAS METAS MÍNIMO	$\geq$
LA MANO DE OBRA DISPONIBLE ES DE	$\leq$		SE DEBE GARANTIZAR UN RENDIMIENTO DE LA INVERSIÓN QUE SEA POR LO MENOS DE	$\geq$

RECUERDE QUE UNA DE LAS CONDICIONES DE LA PROGRAMACION LINEAL ES QUE LAS DESIGUALDADES DEBEN SER CERRADAS (FLEXIBLES), ES DECIR NO SE PERMITEN DESIGUALDADES DE LOS TIPOS MENOR ESTRICTAMENTE (<), O MAYOR ESTRICTAMENTE(>), O ABIERTAS

ALGUNOS PROBLEMAS O SITUACIONES TIENEN RESTRICCIONES CON SIGNO IGUAL, LAS CUALES ES POSIBLE IDENTIFICAR PUES SE ACOMPAÑAN DE EXPRESIONES COMO: **EXACTAMENTE**, EJEMPLO: SE DEBEN CONSUMIR EXCTAMENTE 5 MG DE VITAMINA A

XA=5

EN OTROS CASOS ES POSIBLE QUE UNA MISMA VARIABLE O CONJUNTO DE VARIABLES , EN ALGUNAS RESTRICCIONES TENGA DOS LIMITES, UN EJEMPLO EN EL PROBLEMA DE LAS DIETAS SERÍA.

DEBE CONTENER COMO MAXIMO 50 MILIGRAMOS, PERO NO MÁS DE 20, DEL INSUMO I

50	**≤**	**Xi**	**≤**	**20**

RECUERDEN QUE SE EXPONE LO ANTERIOR COMO UNA SIMPLE ORIENTACION Y QUE ESPOSIBLE QUE EN ALGUNOS PROBLEMAS SEA NECESARIO DEDUCIR DEL CONTEXTO, CUAL ES EL SIGNO QUE ACOMPAÑA LA RESTRICCION

Problemas Clásicos de la Programación Lineal son:

- Problema de las Dietas

En este tipo de problemas se trata de determinar las cantidades que se deben consumir de una serie de alimentos de modo que se cumplan ciertos requerimientos vitamínicos a un costo mínimo. Este tipo de problemas con todas sus posibles variantes es muy común encontrarlos en la literatura de la Investigación de operaciones y específicamente en la programación lineal. Su planteamiento, casi siempre es el mismo.

Suponga que se tienen vitaminas de tipos A,B y C y tres clases de alimentos: Leche, Huevos y Carne. El número de miligramos de cada una de las vitaminas en cada uno de los alimentos esta dado en la siguiente tabla:

Vitamina	Galones de leche	Libras de carne	Docenas de Huevo	Requerimientos diarios mínimos
A	1	1	10	1 mg.
B	100	10	10	50 mg.
C	10	100	10	10 mg.
Costo	\$4000	\$3500	\$1200	

Paso No. 1. Definir las variables de decisión

Llamemos XL, XC, y XH, el número de galones de leche, las libras de carne y las docenas de huevos, respectivamente, dentro de la dieta diaria.

Paso No. 2. Definir la Función objetivo. El Objetivo es minimizar el costo

Paso No. 3. Las restricciones.

En este caso , aparecen en forma de niveles mínimos:

$$XL + XC + 10XH \geq 1$$
$$100XL + 10XC + 10XH \geq 50$$
$$10XL + 100XC + 10XH \geq 10$$

Paso No. 4 . Condición de no negatividad de las variables.

$$XL, XC.XH \geq 0$$

EL MODELO DE P.L. quedará:

$$\text{Min.} \quad Z = 4000XL + 3500\, XC + 1200\, XH$$

Sujeto a:

$$XL + XC + 10XH \geq 1$$
$$100XL + 10XC + 10XH \geq 50$$
$$10XL + 100XC + 10XH \geq 10$$
$$XL, XC.XH \geq 0$$

PROBLEMA DE TRANSPORTE

El problema clásico de transporte contempla una serie de fuentes de producción, o bodegas y una serie de terminales, o destinos ,o agencias donde se demanda el bien o producto. Además se tiene un costo unitario entre cada origen y cada destino, que en este caso tiene como objetivo minimizare.

Estos problemas se pueden considerar como casos simples de programación lineal, aunque para su solución se han desarrollado otras técnicas.

El problema del transporte siempre se plantea igual, teniendo en cuenta dos aspectos claves:

- Los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones siempre son uno (1)
- Los valores de los costos unitarios del punto de producción i, al centro de distribución j, acompañan a las variables en la función objetivo que es la que se pretende minimizar.
- Los signos de las restricciones para la oferta o disponibilidad de bienes son igual (=) *[(1)]* o menor igual. ($\leq$).
- Los signos para la demanda o requerimiento de bienes son igual (=) o mayor igual ($\geq$).

[(1)]Los signos igual se utilizan en algunas restricciones que manejan unidades físicas que no admiten otra interpretación.

Suponga que una Empresa tiene dos fábricas y tres centros de distribución. Se conoce la producción en cada fábrica y la demanda de cada almacén de distribución. Además se conoce el costo de transportar una unidad desde cada fábrica a cada almacén. Se desea determinar la mejor forma de llevar las unidades de cada fábrica a cada almacén, es decir, minimizando el costo de transporte. Supongamos la siguiente Tabla de Costos de Transporte por unidad, la producción en cada fábrica y la demanda en cada almacén.

	ALMACEN 1	ALMACEN 2	ALMACEN 3	PROD. FABRICA
FABRICA 1	4	6	7	90
FABRICA 2	3	9	8	120
DEMANDA	50	70	70	

Definición Variables de decisión:
Llame X_{ij} numero de unidades transportadas de la fabrica i, al Almacén j.

Función Objetivo:

Min $Z = 4X11 + 6X12 + 7X13 + 3X21 + 9X22 + 8X23$

s.a:

Fábrica 1	$X11 + X12 + X13 \leq$	90
Fábrica 2	$X21 + X22 + X23 \leq$	120
Almacén 1	$X11 + X21 \geq$	50
Almacén 2	$X12 + X22 \geq$	70
Almacén 3	$X13 + X23 \geq$	70

Xij	Xij $\geq$	0	i= 1,2 ; j=1,2,3	

En algunos problemas puede resultar útil elaborar la siguiente tabla, que permite incorporar los datos que se han obtenido de acuerdo con los pasos que se han ilustrado anteriormente.

Veamos un ejemplo:
Una fábrica de muebles fabrica dos tipos de sillas, corriente y clásica. Cada silla requiere de un tiempo diferente para manufactura y para pintura . La Fábrica desea conocer cuantas unidades de cada tipo de silla debe producir para lograr la máxima utilidad.
Se logra una utilidad de $200 y $240 , de la venta de una silla clásica y corriente respectivamente. Cada silla debe ser procesada en los departamentos de manufactura y pintura. Para producir una clásica se requiere 6 horas de construcción y 8 de pintura y para una corriente de 12 horas de construcción y 4 de pintura. Se tiene una capacidad diaria de 120 horas en construcción y 64 horas en pintura.

RECURSOS REQUERIDOS PARA PRODUCIR UNA UNIDAD	VARIABLES DE DECISION, (CANTIDADES DE				RECURSOS DISPONIBLES - CAPACIDAD
	X1	X2	X3	Xn	
UTILIDAD O COSTO					

Paso No. 1 : Definición de las variables de decisión, sean:

X1 CANTIDAD DE MUEBLES TIPO 1
X2 CANTIDAD DE MUEBLES TIPO 2

Paso No. 2: Tomar en cuenta los recursos que se necesitan para producir una unidad.

RESTRICCIONES PARA EL PROBLEMA	VARIABLES DE DECISION, (CANTIDADES DE PRODUCTO)				RECURSOS DISPONIBLES - CAPACIDAD
	X1	X2	X3	Xn	
TIEMPO DE MANUFACTURA					
TIEMPO DE PINTURA					
UTILIDAD O COSTO					

EN ESTE CASO PARA PRODUCIR UNA UNIDAD DEBEN UTILIZAR DOS PROCESOS, CONSTRUCCION Y PINTURA

Paso No. 3: Definir lo que se debe invertir por cada unidad

RECURSOS REQUERIDOS PARA PRODUCIR UNA UNIDAD	VARIABLES DE DECISION,		RECURSOS DISPONIBLES -
	X1	X2	
TIEMPO DE MANUFACTURA	6	12	
TIEMPO DE PINTURA	8	4	
UTILIDAD O COSTO			

N0UMERO DE HORAS NECESARIAS PARA UNA UNIDAD EN CADA PROCESO

Para producir una unidad de X1, se necesita 6 horas de manufactura y 8 de pintura.
Para producir una unidad de X2, se necesita 12 horas de manufactura y 4 de pintura.

Paso 4 : Considerar los valores que limitan o los recursos disponibles.

RECURSOS REQUERIDOS PARA PRODUCIR UNA UNIDAD	VARIABLES DE DECISION,		RECURSOS DISPONIBLE
	X1	**X2**	
TIEMPO DE MANUFACTURA	6	12	120
TIEMPO DE PINTURA	8	4	64
UTILIDAD O COSTO			

RESTRICCIONES DE CAPACIDAD PARA CADA PROCESO

Paso 5. Incluir los valores que aportan a las utilidades cada producto.

RECURSOS REQUERIDOS PARA PRODUCIR UNA UNIDAD	VARIABLES DE DECISION,		RECURSOS DISPONIBLE
	X1	**X2**	
TIEMPO DE MANUFACTURA	6	12	120
TIEMPO DE PINTURA	8	4	64
UTILIDAD O COSTO	200	240	

UTILIDADES EN LA VENTA DE CADA PRODUCTO

Debemos entoncer buscar como objetivo maximizar las utilidades, por lo tanto debemos::

MAX Z= 200 X1 + 240 X2

SUJETO A:

$6\,X1 + 12\,X2 \leq 120$
$8\,X1 + 4\,X2 \leq 64$
$X1, X2, \geq 0$

Téngase en cuenta que como en este caso los recursos disponibles son limitados, el signo debe ser $\leq$.

Restricciones de no negatividad que nunca pueden faltar en la formulación.

Ejercicios:
Con base en lo anterior intente formular los siguientes problemas:

- ACB, Auditoría, es una firma de Contadores Públicos dedicados a preparar liquidaciones y pagos de impuestos y también auditan a pequeñas empresas.
  El interés de ACB ahora es saber cuántas auditorías y liquidaciones pueden realizar mensualmente, para lograr los máximos ingresos. Se dispone de 800 horas para trabajo directo y dirección y 160 horas para revisión. Una Auditoría en promedio requiere 40 horas de trabajo directo y dirección y de 10 horas de revisión, además aporta un ingreso de $300.000, Una liquidación de impuestos requiere 8 horas de trabajo directo y de 2 horas de revisión, y produce un ingreso de $100.000. Formule el modelo de programación lineal para ACB.

- La mayor incidencia en el Hospital de Kennedy, se da en las especialidades de Cirugía, Ortopedia y Ginecobstetricia.
  De acuerdo con reportes de Recursos Humanos, para la atención de operaciones quirúrgicas de los servicios señalados, existe una contratación de 13 horas de enfermera, 9 horas de anestesista y 18 horas médico.
  Los quirófanos donde se realizan las intervenciones quirúrgicas son paralizados después de cada operación con el objeto de que por restricciones de higiene y seguridad, se efectúen actividades de esterilización instrumental, ambiental y ropería.
  Para efectuar una operación quirúrgica para cada una de las especialidades antes mencionadas, se requiere lo siguiente:

1 Cirugía requiere:	1 hora médico, 2 horas anestesia, y 3 enfermería.
1 ortopedia requiere:	3 horas médico, 1 hora anestesia y 2 horas enfermería.
1 Ginecobtetricia requiere:	2 horas médico, 1 hora anestesia y 1 hora enfermería.

  De acuerdo con estudios realizados se genera una utilidad en miles de pesos de $500 por cada operación practicada en la sala de cirugía, $800 en ortopedia y 700 en ginecoobstetricia. Formular un modelo de programación lineal que responda a la situación planteada.

BIBLIOGRAFIA

En general es posible utilizar cualquier texto de Investigación operativa, pero complementariamente con los textos dados para la materia se indican a continuación los siguientes:

APELLIDOS Y NOMBRE	TITULO DEL LIBRO	EDITORIAL	AÑO
EPPEN G. D. GOULD F.J. SCHMIT C. P. MOORE Jeffrey H. WEATHERFORD L	INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN LA CIENCIA ADMINISTRATIVA	PEARSON	2000
KAMLES H MATHUR DANIEL SLOW	INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EL ARTE DE LA TOMA DE DECISIONES	PRENTICE HALL	1998
ANDERSON , SWEENEY, WILLIAMS	METODOS CUANTITATIVOS PARA LOS NEGOCIOS	THOMPSOM	2003