

METODO DUAL SIMPLEX.

Este método se aplica a problemas óptimos pero infactibles. En este caso, las restricciones se expresan en forma canónica (restricciones \leq).

La función objetivo puede estar en la forma de maximización o de minimización. Después de agregar las variables de holgura y de poner el problema en la tabla, si algún elemento de la parte derecha es negativo y si la condición de optimalidad está satisfecha, el problema puede resolverse por el método dual simplex. Note que un elemento negativo en el lado derecho significa que el problema comienza óptimo pero infactible como se requiere en el método dual simplex. En la iteración donde la solución básica llega a ser factible esta será la solución óptima del problema.

CONDICION DE FACTIBILIDAD.

La variable que sale es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen arbitrariamente si todas las variables básicas son no negativas, el proceso termina y esta última tabla es la solución óptima factible).

CONDICION DE OPTIMIDAD.

La variable que entra se elige entre las variables no básicas como sigue. Tome los cocientes de los coeficientes de la función objetivo entre los coeficientes correspondientes a la ecuación asociada a la variable que sale.

Ignore los cocientes asociados a denominadores positivos o cero.

La variable que entra es aquella con el cociente más pequeño si el problema es de minimizar o el valor absoluto más pequeño si el problema es de maximización (rompa los empates arbitrariamente). Si los denominadores son ceros o positivos el problema no tiene ninguna solución factible.

EJERCICIOS RESUELTOS V

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Método Simplex Dual

Docente: Juan Carlos Vergara Schmalbach

F.O.

$$\text{Min. } Z = 4X_1 + 12X_2 + 18X_3$$

S.A.

$$X_1 + 3X_3 \geq 3$$

$$2X_2 + 2X_3 \geq 5$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

SOLUCIÓN¹

PASO 1: Convertir el problema de minimización en uno de maximización. La función objetivo se multiplica por -1

F.O.

$$\text{Max. } Z = -4X_1 - 12X_2 - 18X_3$$

Las restricciones se multiplican por -1

S.A.

$$-X_1 - 3X_3 \leq -3$$

$$-2X_2 - 2X_3 \leq -5$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

PASO 2: Se convierten las inecuaciones en ecuaciones.

F.O.

$$Z + 4X_1 + 12X_2 + 18X_3 = 0$$

S.A.

$$-X_1 - 3X_3 + S_1 = -3$$

$$-2X_2 - 2X_3 + S_2 = -5$$

¹HILLER, Frederick. "INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES".

PASO 3: Se determinan las variables básicas y no básicas.

·**Básicas:** S_1 y S_2

·**No Básicas:** X_1 , X_2 y X_3

PASO 4: Elaborar la tabla inicial del simplex

| Variable Básica | Variables | | | | | Solución |
|--------------------|-----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | X_1 | X_2 | X_3 | S_1 | S_2 | |
| S_1 | -1 | 0 | -3 | 1 | 0 | -3 |
| S_2 | 0 | -2 | -2 | 0 | 1 | -5 |
| Z | 4 | 12 | 18 | 0 | 0 | 0 |

PASO 5: Determinar la variable que sale (fila pivote)

Es el número más negativo de la solución de las restricciones = fila de S_2

PASO 6: Determinar la variable que entra (columna pivote)

Razón = Coeficiente de Z / coeficiente fila pivote.

Razón Mayor = Columna X_2 (-12 / 2)

| Variable Básica | Variables | | | | | Solución |
|--------------------|-----------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | X_1 | X_2 | X_3 | S_1 | S_2 | |
| S_1 | -1 | 0 | -3 | 1 | 0 | -3 |
| S_2 | 0 | -2 | -2 | 0 | 1 | -5 |
| Z | 4 | 12 | 18 | 0 | 0 | 0 |
| Razón | - | -6 | -9 | - | 0 | |

PASO 7: Elaborar la nueva tabla del simplex

a) Nueva fila pivote = Fila pivote / elemento pivote

| | | | | | | |
|----|----|----|----|------|-----|-------------------|
| 0 | -2 | -2 | 0 | 1 | -5 | Fila Pivote |
| -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | Elemento Pivote |
| 0 | 1 | 1 | 0 | -0,5 | 2,5 | Nueva Fila Pivote |

b) Nuevas filas = fila anterior - coeficiente de la columna pivote x nueva fila pivote.

Nueva Fila (S1)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & -0,5 & 2,5 \\
 \hline
 -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Fila Anterior} \\
 \text{Coeficiente} \\
 \text{Nueva Fila Pivote} \\
 \text{Nueva Fila}
 \end{array}
 \end{array}$$

Nueva Fila (Z)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 4 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 \\
 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & -0,5 & 2,5 \\
 \hline
 4 & 0 & 6 & 0 & 6 & -30
 \end{array}
 \end{array}$$

Nueva Tabla del Simplex

| Variable Básica | Variables | | | | | Solución |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | |
| S ₁ | -1 | 0 | -3 | 1 | 0 | -3 |
| X ₂ | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 2,5 |
| Z | 4 | 0 | 6 | 0 | 6 | -30 |
| Razón | -4 | - | -2 | 0 | - | |

Se realizan nuevamente los pasos del 5 al 7 obteniendo como solución final:

| Variable Básica | Variables | | | | | Solución |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | |
| X ₃ | 0,33 | 0 | 1 | -0,33 | 0 | 1 |
| X ₂ | -0,33 | 1 | 0 | 0,33 | -0,5 | 1,5 |
| Z | 2 | 0 | 0 | 2 | 6 | -36 |

NOTA: No hay más iteraciones cuando no existan soluciones con coeficientes negativos.

R\ El valor mínimo se alcanza para un X₂ = 3/2 y X₃ = 1, para un Z = 36

EJEMPLO 2

Minimizar $Z = 2000X_1 + 1000X_2$

Sujeto a:

$$3X_1 + X_2 \geq 40$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Minimizar $Z = 2000X_1 + 1000X_2$

Sujeto a:

$$-3X_1 - X_2 \leq -40$$

$$-2X_1 - 2X_2 \leq -60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

| V. Básica | Z | X ₁ | X ₂ | S ₁ | S ₂ | Solución |
|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| Z | 1 | -2000 | -1000 | 0 | 0 | 0 |
| S ₁ | 0 | -3 | -1 | 1 | 1 | -40 |
| S ₂ | 0 | -2 | -2 | 0 | 0 | -60 |
| V. Básica | Z | X ₁ | X ₂ | S ₁ | S ₂ | Solución |
| Z | 1 | -1000 | 0 | 0 | -500 | 30000 |
| S ₁ | 0 | -2 | 0 | 1 | -1/2 | -10 |
| X ₂ | 0 | 1 | 1 | 0 | -1/2 | 30 |
| V. Básica | Z | X ₁ | X ₂ | S ₁ | S ₂ | Solución |
| Z | 1 | 0 | -1000 | -500 | -250 | 35000 |
| S ₁ | 0 | 1 | -1 | -1/2 | 1/4 | 5 |
| S ₂ | 0 | 0 | -2 | 1/2 | -5/4 | 25 |

Solución óptima :

$$X_1 = 5$$

$$X_2 = 25$$

$$Z = 35000$$

Ejemplo 3

Resolver por el método simplex-dual el siguiente programa lineal.

Mínimizar $Z = 2X_1 + X_2$

Sujeto a $3X_1 + X_2 \geq 3$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 3$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Reescribiendo este programa

Máximizarse $-Z = -2X_1 - X_2$

Sujeto a

$$-3X_1 - X_2 + X_3 = -3$$

$$-4X_1 - 3X_2 + X_4 = -6$$

$$-X_1 - 2X_2 + X_5 = -3$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0$$

Tabla Simplex-Dual

| | | | Coeficiente de | | | | | | |
|-----------|-----------------|-----------------|----------------|----|----|----|----|----|--------------|
| | | | | | | | | | |
| Iteración | Variable Básica | Número Ecuación | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | Lado Derecho |
| 0 | Z | 0 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | X3 | 1 | 0 | -3 | -1 | 1 | 0 | 0 | -3 |
| | X4 | 2 | 0 | -4 | -3 | 0 | 1 | 0 | -6 |
| | X5 | 3 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 1 | -3 |
| | | | | | | | | | |

Tabla Primera Iteración

| | | | Coeficiente de | | | | | | |
|-----------|-----------------|-----------------|----------------|--------|----|----|-------|----|--------------|
| | | | | | | | | | |
| Iteración | Variable Básica | Número Ecuación | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | Lado Derecho |
| 1 | Z | 0 | -1 | 2/3 | 0 | 0 | 1/3 | 0 | -2 |
| | X3 | 1 | 0 | -1 2/3 | 0 | 1 | - 1/3 | 0 | -1 |
| | X2 | 2 | 0 | 1 1/3 | 1 | 0 | - 1/3 | 0 | 2 |
| | X5 | 3 | 0 | 1 2/3 | 0 | 0 | - 2/3 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | | |

Tabla Segunda Iteración

| | | | Coeficiente de | | | | | | |
|-----------|-----------------|-----------------|----------------|----|----|-------|-------|----|--------------|
| | | | | | | | | | |
| Iteración | Variable Básica | Número Ecuación | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | Lado Derecho |
| 2 | Z | 0 | -1 | 0 | 0 | 2/5 | 1/5 | 0 | -2 2/5 |
| | X1 | 1 | 0 | 1 | 0 | - 3/5 | 1/5 | 0 | 3/5 |
| | X4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 4/5 | - 3/5 | 0 | 1 1/5 |
| | X5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 |
| | | | | | | | | | |

Tabla Final

| | | | Coeficiente de | | | | | | |
|-----------|-----------------|-----------------|----------------|--------|----|-------|-------|----|--------------|
| Iteración | Variable Básica | Número Ecuación | Z | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | Lado Derecho |
| 0 | Z | 0 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | X3 | 1 | 0 | -3 | -1 | 1 | 0 | 0 | -3 |
| | X4 | 2 | 0 | -4 | -3 | 0 | 1 | 0 | -6 |
| | X5 | 3 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 1 | -3 |
| 1 | Z | 0 | -1 | 2/3 | 0 | 0 | 1/3 | 0 | -2 |
| | X3 | 1 | 0 | -1 2/3 | 0 | 1 | - 1/3 | 0 | -1 |
| | X2 | 2 | 0 | 1 1/3 | 1 | 0 | - 1/3 | 0 | 2 |
| | X5 | 3 | 0 | 1 2/3 | 0 | 0 | - 2/3 | 1 | 1 |
| 2 | Z | 0 | -1 | 0 | 0 | 2/5 | 1/5 | 0 | -2 2/5 |
| | X1 | 1 | 0 | 1 | 0 | - 3/5 | 1/5 | 0 | 3/5 |
| | X2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 4/5 | - 3/5 | 0 | 1 1/5 |
| | X5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 |