MODELOS MATEMATICOS

1. En una pastelería se hacen dos tipos de tartas: Vienesa y Real. Cada tarta Vienesa necesita un cuarto de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce un beneficio de 250 Pts, mientras que una tarta Real necesita medio Kg. de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce 400 Ptas. de beneficio. En la pastelería se pueden hacer diariamente hasta 150 Kg. de bizcocho y 50 Kg. de relleno, aunque por problemas de maquinaria no pueden hacer mas de 125 tartas de cada tipo. ¿Cuántas tartas Vienesas y cuantas Reales deben vender al día para que sea máximo el beneficio?

Solución

En primer lugar hacemos una tabla para organizar los datos:

Tipo	Nº	Bizcocho	Relleno	Beneficio
T. Vienesa	x	1.x	0,250x	250x
T. Real	y	1.y	0,500y	400y
		150	50	

Función objetivo (hay que obtener su máximo): $f(x, y)=250x+ 400y$

Sujeta a las siguientes condiciones (restricciones del problema):

$$\begin{cases} x+y\leq 150 \\ 0{,}250x+0{,}500y\leq 50 \\ x\leq 125 \\ y\leq 125 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$$

Consideramos las rectas auxiliares a las restricciones y dibujamos la región factible:

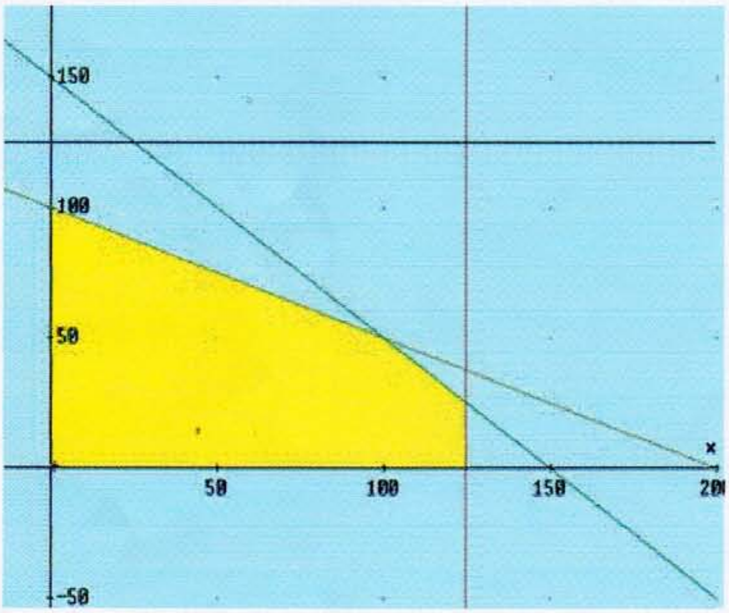
Para $0.25x+0.50y=50$, ó $x + 2y=200$

x	y
0	100
200	0

Para $x + y = 150$

x	y
0	150
150	0

La otras dos son paralelas a los ejes
Al eje OY $x=125$
Al eje Ox $y=125$
Y las otras restricciones (x e y mayor o igual a cero) nos indican que las soluciones deben estar en el primer cuadrante
La región factible la hemos coloreado de amarillo:



Encontremos los vértices:
El O(0,0), el A(125, 0) y el D(0, 100) se encuentran directamente (son las intersecciones con los ejes coordenados)
Se observa que la restricción $y \leq 125$ es redundante (es decir "sobra")
Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 200 \\ x + y = 150 \end{cases}$$

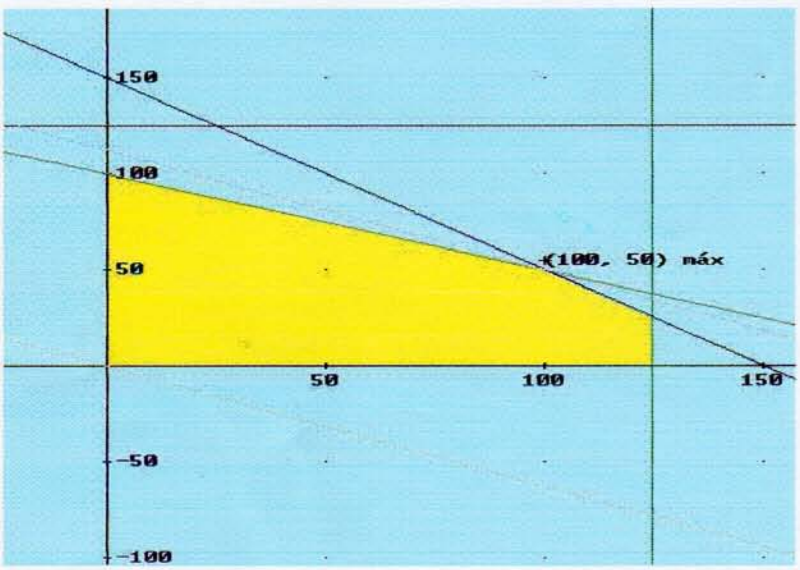
, por reducción obtenemos y=50, x=100

Otro vértice es el punto C(100, 50)
Y el último vértice que nos falta se obtiene resolviendo el sistema:
X+y=150
X=125
Cuya solución es: X=125, Y=25 B(125, 25)

Los vértices de la región son O(0,0), A(125,0), B(125,25) y C(100,50) y D(0,100),

Si dibujamos el vector de dirección de la función objetivo f(x, y)=250x+ 400y
Haciendo 250x+ 400y =0, y=-(250/400)x=-125x/200

x	y
0	0
200	-125



Se ve gráficamente que la solución es el punto (100, 50), ya que es el vértice mas alejado (el último que nos encontramos al desplazar la rectas 250x+400y=0)
Lo comprobamos con el método analítico, es decir usando el teorema que dice que si existe solución única debe hallarse en uno de los vértices
La unción objetivo era: f(x, y)=250x+400y, sustituyendo en los vértices obtenemos
f(125,0)=31.250
f(125,25)=31.250+10.000=41.250
f(100,50)=25.000+20.000=45.000
f(0,100)=40.000

El máximo beneficio es 45.000 y se obtiene en el punto (100, 50)
Conclusión: se tienen que vender 100 tartas vienesas y 50 tartas reales.

2. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la