Problemas resueltos de Programación Lineal

Un problema de programación lineal con dos variables tiene por finalidad optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal:

$$f(x,y) = ax + by$$

llamada **función objetivo**, sujeta a una serie de **restricciones** presentadas en forma de sistema de inecuaciones con dos incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y \le c_1 \\ a_2x + b_2y \le c_2 \\ \ldots\ldots \\ a_nx + b_ny \le c_n \end{array}\right\}$$

Cada desigualdad del sistema de restricciones determina un semiplano. El conjunto intersección de todos esos semiplanos recibe el nombre de zona de **soluciones factibles**. El conjunto de los vértices del recinto se denomina conjunto de **soluciones factibles básicas** y el vértice donde se presenta la solución óptima se llama **solución máxima** (o mínima según el caso). El valor que toma la función objetivo en el vértice de solución óptima se llama **valor del programa lineal.**

El procedimiento a seguir para resolver un problema de programación lineal en dos variables será, pues:

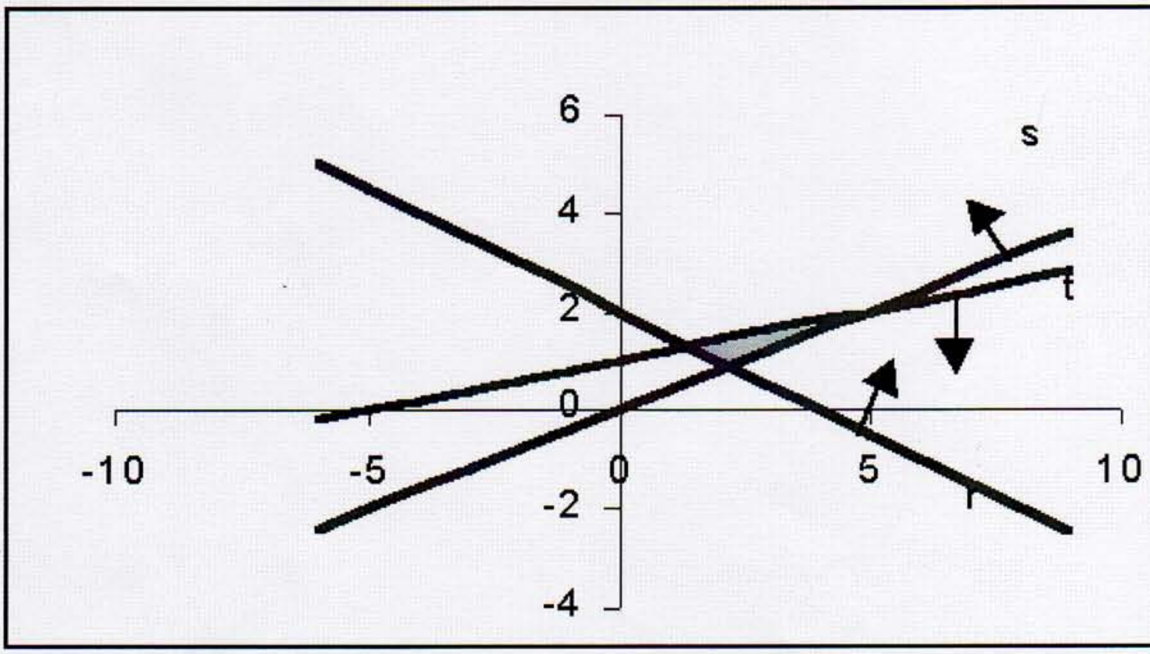
1. Elegir las incógnitas.
2. Escribir la función objetivo en función de los datos del problema.
3. Escribir las restricciones en forma de sistema de inecuaciones.
4. Averiguar el conjunto de soluciones factibles representando gráficamente las restricciones.
5. Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de soluciones factibles (si son pocos).
6. Calcular el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices para ver en cuál de ellos presenta el valor máximo o mínimo según nos pida el problema (hay que tener en cuenta aquí la posible no existencia de solución si el recinto no es acotado).

***PROBLEMA* N° 01**

Minimizar la función f(x, y)=2x+8y sometida a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x + 4y \ge 8 \\ 2x - 5y \le 0 \\ -x + 5y \le 5 \end{array}\right\}$$

Llamando, respectivamente r, s y t a las rectas expresadas en las tres últimas restricciones, la zona de soluciones factibles sería:



Siendo los vértices:

A intersección de r y t:

$$\left.\begin{array}{l}2x+4y=8\\-x+5y=5\end{array}\right\}\Rightarrow A\left(\frac{10}{7},\frac{9}{7}\right)$$

B intersección de s y t:

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y=0\\-x+5y=5\end{array}\right\}\Rightarrow B(5,2)$$

C intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l}2x+4y=8\\3x-5y=0\end{array}\right\}\Rightarrow C\left(\frac{20}{9},\frac{8}{9}\right)$$

Siendo los valores de la función objetivo en ellos:

$$f(A)=2\cdot\frac{10}{7}+8\cdot\frac{9}{7}=\frac{92}{7}\approx 13{,}1$$

$$f(B)=2\cdot 5+8\cdot 2=26$$

$$f(C)=2\cdot\frac{20}{9}+8\cdot\frac{8}{9}=\frac{104}{9}\approx 11{,}5 \qquad \text{mín } imo$$

Alcanzándose el mínimo en el punto C.

PROBLEMA N° 02

Un herrero con 80 kgs. de acero y 120 kgs. de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 20.000 y 15.000 Bolívares cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 kg. De acero y 3 kgs de aluminio, y para la de montaña 2 kgs. de ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña venderá?

Sean las variables de decisión:

x= n: de bicicletas de paseo vendidas.

y= n: de bicicletas de montaña vendidas.

Tabla de material empleado:

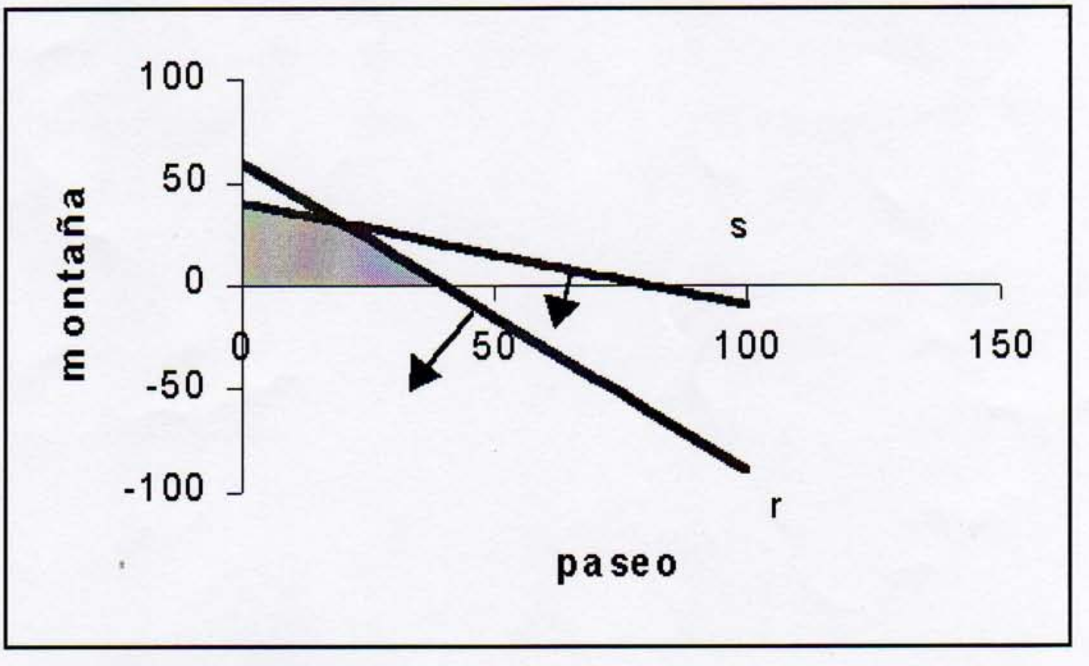
	Acero	Aluminio
Paseo	1	3
Montaña	2	2

Función objetivo:

f(x, y)= 20.000x+15.000y máxima.

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ r \equiv 3x + 2y \leq 120 \\ s \equiv x + 2y \leq 80 \end{array}\right\}$$



Zona de soluciones factibles:

Vértices del recinto (soluciones básicas):

A(0, 40)

B intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,30)$$

C(40,0)

Valores de la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = 15000 \cdot 40 = 600000$$

$$f(B) = 20000 \cdot 20 + 15 \cdot 30 = 850000 \qquad \text{máx}\,imo$$

$$f(C) = 20000 \cdot 40 = 800000$$

Ha de vender 20 bicicletas de paseo y 30 de montaña para obtener un beneficio máximo de 850.000 Bolívares.

PROBLEMA N° 03